DE MOTU CORPORUM PROJECTORUM IN SPATIO NON RESISTENTE

DISSERTATIO

HABITA

IN SEMINARIO ROMANO SOC. JESU

A MARCHIONE

JACOBO ZAMBECCARI

SEMINARII ROMANI CONVICTORE.

ACADEMIAE REDIVIVORUM CANDIDATO.

Die Augusti Anno MDCCXL.
Dato omnibus opponendi loco.

ROMÆ, Typis Antonii de Rubeis in via Seminarii Romani.
SUPERIORUM PERMISSU.

IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendiss. P. Mag. Sacri Palatii Apostolici.

Philippus Archiepisc. Theodosiæ Vicesg.

IMPRIMATUR.

Fr. Aloysius Nicolaus Ridolphi Ord. Præd. Sacri Palatii Apostolici Magister.

MEchanici fere omnes corporibus tribuunt vim quandam retinendi eum ſtatum quietis, vel motus uniformis in directum, in quo ſemel ſunt poſita; niſi ab aliqua vi extrinſeca, ut gravitate, elaſticitate, impulſu aliorum corporum, & aliis ejuſmodi determinentur ad eum ſtatum mutandum. Eam vim Newtonus appellat vim inſitam, & vim inertiæ. Ac primum quidem conſiderari ſolent motus omnes corporum ea vi præditorum in ſpatiis non reſiſtentibus, tum variationes motuum ex reſiſtentia ortæ determinantur.

Ea quidem vis inertiæ in corporibus admitti poteſt tanquam Hypotheſis phyſica, quæ cum phænomenis non modo non pugnet, ſed ſatis congruat. Demonſtrari tamen non poteſt neque ex phænomenis, neque metaphyſicis ratiocinationibus. Ex phænomenis enim nunquam evidenter conſtare poterit, gravitatem, elaſticitatem, vel alias ejuſmodi vires non ineſſe in ipſa natura corporum, quorum particulæ, vel ſe mutuo trahant, vel fugiant, vel pariter ad certum locum ferantur; & multo minus evidenter ex phænomenis conſtabit unquam, motum corporum etiam per ſeſe non langueſcere. Cum enim experimenta inſtitui non poſſint, niſi in mediis utcunque parum reſiſtentibus; licebit ambigere, utrum omnis retardatio motus profluat ex medii reſiſtentia, an etiam ex ipſa motus natura deficientis per ſeſe.

Rationes autem metaphyſicæ nihil unquam evincent, niſi comperta ſit ipſa corporum natura, quæ nobis non innoteſcit niſi per phœnomena; & hanc ob cauſam irritus videtur eſſe conatus Leonardi Euleri Doctiſſimi Viri, qui in ipſo exordio ſuæ Mechanicæ, operis ceteroquin egregii, cujus partem alteram adhuc deſiderat litteratus Orbis, nititur demonſtrare hanc ipſam inertiam corporum; nec tamen evincit.

Satius videtur eam ipſam vim in Mechanicam admittere eo tantum pacto, quo Newtonus Attractionem, Impulſum, ac Propenſionem admiſit Princip. l. 1. def. 8. ſic enim habet: *Voces autem Attractio-*

tractionis impulsus, ac Propensionis cujuscunque in centrum indifferenter, & pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non physice, sed mathematice tantum considerando. Unde caveat Lector, ne per hujusmodi voces cogitet, me speciem, vel modum actionis, causamve, aut rationem physicam alicubi definire : & paulo superius dixerat : *Mathematicus duntaxat est hic conceptus; nam virium causas, & sedes physicas hic non expendo.*

Licebit igitur in ipsa corporis idea mechanicè tradita assumere determinationem retinendi eum statum quietis, vel motus uniformis in directum, quem semel habuit; omnemque causam mutantem eum statum appellare vim extrinsecam, nimirum non pertinentem ad eum conceptum; licet fortasse ea causa sit vel in ipsa corporis natura, vel in libera lege a summo Naturæ Opifice edita, cum Orbem conderet. Si motus per se languescat etiam in vacuo; vacuum ipsum spectabitur tanquam medium resistens, ac resistentia in fluidis, quæ per experimenta deprehenditur, coalescet ex duplici resistentia, quarum altera oriatur ex ipsa motus languescentis natura, altera ex fluidi resistentia: Determinationes autem motuum in spatio non resistente erunt non physicæ determinationes, sed mathematicæ; quarum tamen ope facilius deinde definientur variationes motuum ex resistentia ortæ, & ipsi motus, qui in natura contingunt.

Cum verò experimentis constet motum semel acceptum in spatiis tenuissimis diutissimè conservari, in iisdem habebunt locum quamproximè ii motus, qui mechanicè conveniunt corporibus in spatiis non resistentibus; cumque graviora corpora in ipso aere non multum de motu suo deperdant, non magnos errores admittent motus globorum e tormentis bellicis erumpentium ex eadem hypothesi definiti, licet iidem multo accuratiores haberi possint computata resistentia.

Proderit igitur etiam arti bellicæ tormentariæ determinatio motuum, quos haberent corpora gravia in spatiis non resistentibus vi inertiæ prædita; quam materiam a Galilæo primum geometricè tentatam, a Torricellio auctam, a Mechanicis omnibus fusè pertractatam ita exponet hæc dissertatio, ut & methodus ipsa aliquid novi habeat, & nonnulla theoremata ab aliis prætermissa in medium proferantur.

LEMMA I.

Corpus in spatio non resistente perseverat in eo statu quietis, vel motus uniformis in directum, in quo semel est positum, quem non mutat, nisi quatenus ab aliqua vi cogatur eum statum mutare. Patet evidenter, si quæcunque tandem sit mutationis causa, ea ipsa dicatur vis statum corporis immutans; neque enim ulla mutatio accidet sine causa, & effectus suæ causæ erit proportionalis.

LEM-

LEMMA II.

Gravitas indefinenter agit in corpora, urgendo ipsa ad Terræ centrum, adjiciens in exigua distantia ab ejus superficie æqualibus temporibus æquales velocitatis gradus saltem quamproximè. Admittitur fere ab omnibus Mechanicis. Galilæus enim admisit gravitatem constantem, Fermatius, ac Ceva crescentem in ratione distantiarum a centro Terræ, Newtonus in ratione reciproca duplicata earundem distantiarum, quarum ratio cum insensibiliter varietur, acceleratio evadit ad sensum constans.

Cor. 1. Erit igitur (per lemma 1.) velocitas aquisita duplo tempore dupla, triplo tripla, & ita porro; ac proinde velocitates erunt ut tempora.

Cor. 2. In corporibus autem projectis gravitas agit per lineas ad sensum parallelas, & perpendiculares ad Horizontem; agit enim per rectas convergentes ad centrum Terræ, quæ in singula milliaria directionem minus mutant, quam singulis minutis.

LEMMA III.

Si corpus urgeatur duplici vi, quarum altera ipsum deferret directione A B dato tempore ex A in B, altera directione A C ex A in C; completo parallelogrammo A B D C, in fine ejus temporis erit in D. Debet enim utrique vi obsecundare, ac recedere tam a recta A B secundum directionem A C per intervallum æquale ipsi A C, quam a recta A C secundum directionem A B per intervallum æquale ipsi A B. Erit igitur in D. F. 1.

Cor. 1. Si spatium decurrendum prima vi per A B, ad spatium decurrendum vi altera per A C sit in fine cujuscunque temporis in eadem ratione; describet corpus rectam A D. Cum enim sit B D semper æqualis & parallela A C, erit constans ratio A B ad B D, & angulus A B D. Quare & species trianguli B A D, & proinde etiam angulus B A D constans erit; ac punctum D erit semper in eadem recta A D.

Cor. 2. In omni alio casu describetur curva, cujus natura determinabitur ex data relatione rectarum A B, & B D.

LEMMA IV.

Si partes A M rectæ A B exponant tempora, ordinatæ M N ad lineam A N D parallelæ rectæ B D exponant velocitates corporis in directum progredientis, & parallelogrammum A B D G exponat spatium quod motu uniformi decurreretur tempore A B cum velocitate B D; spatia quocunque tempore A M percursa ab eodem corpore cum velocitate illa perpetuo aucta exponentur per aream A N M. Exponantur enim, si fieri potest, vel per aream A Q R F. 2.

 majo-

majorem, vel per A qr minorem, terminatam per aliquam ordinatam QR ulteriorem, vel per qr citeriorem ipsâ MN; & recta AM per continuam bissectionem secetur in tot partes æquales AH, HL, LO, OM, ut saltem una ex iis MO evadat minor quam Mq, & eidem æqualis ME sit minor quam MQ. Per omnia puncta HLOE ducantur ordinatæ, quas rectæ per KSVNC parallelæ ipsi AB secent exterius in $inau$, interius in PTXm: Occurrat autem recta PK rectæ AG in I, & ordinatæ MN, EC rectæ GD in ZY, dicanturque parallelogramma HI, Li, On, Ma, Eu circumscripta, parallelogramma vero HP, LT, OX, Mm inscripta. Et quoniam spatia descripta eadem constanti velocitate sunt ut tempora, & eodem tempore ut velocitates; patet parallelogrammo EZ exponi spatium, quod percurreretur tempore EM cum velocitate constanti BD, vel EY, & parallelogrammis Eu, vel Mm spatia, quæ percurrerentur eodem tempore ME cum velocitate EC, vel MN; ac generaliter parallelogrammis circumscriptis Ma, On, Li, HI exponi spatium percurrendum temporibus æqualibus MO, OL, LH, HA, cum ea velocitate, quam corpus habet in fine eorum temporum; parallelogrammis autem inscriptis MV, OS, LK, spatium percurrendum cum velocitate, quam habet initio eorundem temporum. Et ut nullum est parallelogrammum inscriptum respondens abscissæ AH, ita nullum spatium fit tempore AH cum velocitate, quam corpus habet initio ejusdem temporis, quæ nulla est. Igitur si corpus singulis temporibus habuisset semper velocitatem, quam habuit initio eorundem temporum; exponeretur spatium percursum toto tempore AM, per summam parallelogrammorum inscriptorum usque ad MN, si autem habuisset velocitatem, quam habuit in fine singulorum temporum, exponeretur per summam circumscriptorum. Cum autem parallelogrammum inscriptum Mm æquetur circumscripto Ma, ob bases ME, MO æquales, & omne aliud inscriptum præcedenti circumscripto; erit summa omnium circumscriptorum usque ad MN æqualis omnibus inscriptis usque ad EC, ac proinde minor quam area ACE; summa autem omnium inscriptorum usque ad MN, æqualis summæ circumscriptorum usque ad OV, adeoque major, quam area AVO. Si igitur singulis temporibus habuisset corpus velocitatem finalem; exponeretur spatium decursum, per aream minorem area ACE; si autem habuisset velocitatem initialem, exponeretur per aream majorem area AVO. Velocitate autem perpetuo aucta majus spatium conficitur singulis temporibus, quam sola initiali, & minus quam finali. Igitur spatium decursum velocitate perpetuo aucta exponitur per aream adhuc minorem, quam sit area ACE, & majorem quam sit area AVO. Exponi autem dicebatur per ARQ, vel per Arq. Ergo area ARQ erit minor quam ACE, vel area Arq major, quam AVO, sive totum minus sua parte, vel pars major toto, quod est absurdum. Debet igitur exponi per aream ANM.

Cor. 1.

Cor. 1. Recta M N accedente ad B D, spatium descriptum toto tempore A B exponetur per aream A D B, & spatia descripta binis temporibus A M, A B erunt ut areæ A N M, A D B.

Cor. 2. Si compleatur parallelogrammum A M N F, exponetur spatium percurrendum tempore A M cum velocitate finali M N, per ipsum parallelogrammum A F; cum spatium eodem tempore percurrendum cum velocitate M Z debeat exponi per parallelogrammum M G.

Cor. 3. Quare si area A N M dicatur planum velocitatum, erit spatium motu accelerato decursum ad spatium eodem tempore decurrendum cum celeritate finali ut ipsum planum velocitatum ad parallelogrammum sibi circumscriptum, spatia autem diversis temporibus descripta ut plana velocitatum, quæ iis temporibus respondent. Facile autem eadem demonstratio aptari potest motibus retardatis.

SCHOLIUM.

Poterat propositum lemma directe demonstrari, ostendendo prius, spatium percursum motu accelerato exponi per aream majorem quam sit A O V, & minorem quam A E C, ac deinde sic concludendo. Augeatur jam numerus particularum A H, H L &c. in infinitum, & abeuntibus demum O V, E C in M N, abibit utraque area in aream A N M. Erit proinde ipsa area A N M mensura spatii confecti. Hæc autem demonstrandi methodus ex eo pendet, quod inter duas quantitates variabiles, & perpetuo ad se accedentes magis quam pro quavis determinata differentia, nonnisi unica potest esse quantitas intermedia ex illarum variatione invariabilis. Si enim essent duæ utcunque parum differentes, jam illæ quantitates variabiles ad se non accederent magis, quam pro illa differentia.

Poterat brevius, concipi singulis tempusculis infinitè parvis tanquam constans velocitas, & spatium descriptum exponi promiscue vel per parallelogrammum circumscriptum, vel per inscriptum, contemnendo parallelogramma X a, T n &c. & trilinea X N V, V N a &c. tanquam infinitè parva respectu parallelogrammorum M V, O S &c., quæ methodus coincidit cum Newtoni methodo primarum, & ultimarum rationum, & licet videatur aliquid contemnere, vere nihil contemnit, nec quantitates infinitè parvas admittit, tanquam determinatas quasdam quantitates, quarum tamen infinitus numerus contineatur in quantitate finita; sed considerat quantitates potius indefinite parvas, & minuendas ultra quoscunque limites, quod luculenter expressit Newtonus in Scholio post sectionem primam lib. 1. Principiorum, & clarissimè exposuerunt PP. Thomas Le Seur, & Franciscus Jacquier summi viri in Commentariis Principiorum Newtoni, cujus operis tomus primus, qui nuper prodiit, tanto plausu exceptus est a doctissimis per universam Europam Geometris. Sic autem habent n. 139. *Quantitates evanescentes* (sic enim Newtonus

wtonus

wtonus appellat, quas Leibnitius differentias nominat, alii vero infinitesimas, & infinitè parvas) *concipi non debent velut determinatæ, aut determinabiles quædam portiones quantitatum, quæ certam, & definitam parvitatem obtineant. Quascunque enim portiunculas linearum superficierum, aut corporum acceperimus, aut designaverimus, hæ semper reipsa finitæ erunt non evanescentes. Itaque non sunt intra certos terminos quantumvis proximos coarctandæ; unde hæ quantitates semper ut decrescentes, ac perpetuo diminuendæ accipi debent.*

Ea autem methodus pendet ab hoc theoremate. Si duæ quantitates auctæ, vel imminutæ, duabus quantitatibus indefinitè parvis, seu minuendis, ut opus fuerit, infra quoscunque limites, inveniantur æquales; oportet & ipsæ omnino æquales sint, & illa, quæ addita fuerant vel ablata, æqualia fuerint, cujus theorematis veritas patet per reductionem ad impossibile. Si enim primæ illæ duæ quantitates ex quantitatum sibi additarum, vel ablatarum variatione invariabiles, non sint æquales; erit aliqua ipsarum differentia. Hæc autem debet esse minor, quam summa illarum quantitatum, quibus imminutæ, vel auctæ æquales evaserant. At cum eæ possint assumi ita parvæ ut ipsarum summa sit infra quoscunque limites; ita assumantur, ut eadem summa sit minor, quam illa ipsa differentia, qua debuerat esse major. Eritque simul major, & minor. Ea absurdum.

Newtonus quidem tota illa prima sectione elegantissima theoremata protulit, demonstravitque circa primarum, & ultimarum rationum methodum, *ut effugerem*, inquit, *tædium deducendi perplexas demonstrationes more veterum Geometrarum ad absurdum*. Id autem nos icciro præstitimus in hujus lemmatis demonstratione, ut constaret, quo pacto in ejusmodi casibus liceat exigere demonstrationes ad rigidissimam veterum formam. Quanquam qui methodi infinitorum, seu potius indefinitorum vim probe perspexerit, haud quidquam profecto accuratiores Veterum demonstrationes existimabit. Atque utinam integra ejusdem elementa Euclideo more demonstrata prodirent in lucem; ut plurimos, qui a summis etiam viris commissi sunt, paralogismos evitare liceret, potissimum circa infinitesimos curvarum arcus!

PROPOSITIO I.

Spatia confecta a gravibus libere descendentibus in medio non resistente prope superficiem terræ sunt ut quadrata temporum.

F. 3. DEmonstratur. In triangulo A B D partes A M rectæ A B exponant tempora, & quoniam ducta M N parallela B D, est A M . A B :: M N . B D, erunt ipsæ M N, B D, ut tempora.

pora. Igitur ipsæ M N, B D exponent velocitates per Corol. 1. lem. 2.. Quare si area parallelogrammi A B D G exponat spatium percurrendum tempore A B cum velocitate constanti B D; erunt per corol. 3. lem. 4. spatia confecta a gravi delabente temporibus A M, A B, ut areæ similium triangulorum A M N, A B D sive per prop. 19. l. 6. ut quadrata A M, A B, nempe ut quadrata temporum, Q. E. D.

Cor. Cum area trianguli A M N sit dimidia parallelogrammi A M N F; erit per cor. 3. lem. 4. spatium confectum a gravi libere delabente dimidium ejus spatii, quod eodem tempore confecisset cum velocitate, quam acquirit in fine ejusdem temporis.

S C H O L I U M.

Notissima est numerorum imparium affectio, ut eorum summæ ab unitate inchoatæ efficiant quadratos numeros. Bini enim efficiunt bis duo, terni ter tria, & ita porro, cum sit $1+3=4$; $1+3+5=9$; $1+3+5+7=16$. &c. Inde autem, & ex hac ipsa propositione eruitur, gravia libere descendendo decurrere secundo tempore triplum ejus spatii, quod decurrerunt primo tempore, tertio quintuplum, quarto septuplum, & ita porro per numeros impares. Poterat autem id ipsum, & propositio assumi etiam ex experimentis Galilæi, Ricciolii, Chalesii, Newtoni, ac aliorum complurium, qui idem in aere experti sunt, non quidem accuratè ob aeris resistentiam, sed tamen quamproximè.

Hanc ipsam propositionem eleganti calculo confirmavit Hugenius, deducto ex eo, quod gravitas æqualibus temporibus æqualiter agat.

D E F I N I T I O. F.4.

Si corpus ex A projectum directione A B cadat in D, recta autem verticalis D B occurrat directioni A B in B, & fiat, ut D B ad B A, ita B A ad A E, ipsam A E voco mensuram projectionis.

Cor. Erit igitur $AE \times DB = AB q$.

P R O P O S I T I O II.

Si quacunque alia directione A M cum eadem velocitate iterum proiiciatur idem corpus, & post aliquod tempus perveniat ad N erecta verticali N M, erit pariter E A. A M:: A M. M N.

Demonstratur. Motus corporis ex A ad D, vel N componitur juxta lemma tertium ex motu vi projectionis per A B, vel A M, & motu ex gravitate per spatia ipsis B D, M N

æqualia. Erit igitur per prop. 1. B D ad M N, ut quadratum primi temporis ad quadratum secundi. Cumque ob vim projectionis permanentem per lemma 1. sit A B ad A M, ut primum tempus ad secundum; erit A B q. A M q :: B D. M N, vel assumpta communi altitudine A E, erit A B q. A M q :: B D x A E. M N x A E. Est autem per cor. def. 1. A B q = A E x D B. Ergo erit & A M q = M N x A E, sive E A. A M :: A M. M N. Q. E. D.

Cor. 1. Si ipsa A E ponatur verticalis, ducanturque rectæ A N, E M; similia erunt triangula A M E, A N M; anguli enim alterni A M N, E A M æquales erunt inter se, & latera circa ipsos proportionalia. Erit igitur & angulus A M E angulo A N M æqualis.

Cor. 2. Quotiescunque autem ii anguli erunt æquales, semper corpus invenietur in N; erunt enim semper in iisdem triangulis bini anguli æquales, ac proinde ipsa triangula similia, & E A. A M :: A M. M N.

Cor. 3. Sumatur A M dimidia A E, eritque M N dimidia A M, & quarta pars ipsius A E. Quare si eo tempore, quo grave descendit per M N, habuisset semper velocitatem, quam acquisivit in fine, absolvisset spatium ipsi A M æquale per cor. pr. 1. Id autem spatium absolvit vi projectionis. Ergo in fine descensus per M N aquisivit velocitatem æqualem velocitati projectionis. Ergo cum E A mensura projectionis sit quadrupla ipsius M N; erit quadrupla ejus altitudinis, per quam grave cadendo aquireret velocitatem velocitati projectionis æqualem.

Cor. 4. Si velocitates projectionum essent diversæ, mensuræ projectionum essent ut quadrata velocitatum, essent enim in ratione altitudinum, ex quibus gravia cadendo acquirerent velocitates projectionum, eæ autem altitudines essent ut quadrata temporum per prop. 1., sive ut quadrata velocitatum per cor. 1. lem. 2.

Cor. 5. Si igitur vires vivæ sint ut quadrata velocitatum; erunt mensuræ projectionum ut vires vivæ; adeoque mensuræ projectionum essent mensuræ virium vivarum.

S C H O L I U M.

F. 5. Hæc theoria a Cassino Patre primum inventa recensetur a Blondello in opusculo, cui titulus *L'Art de jetter les Bombes*, & Cassinus quidem appellat lineam æqualitatis, quam nos ideo mensuram projectionis nominavimus, quia ex ipsa pendet projectionis vis, & velocitas. Sic recta A B, quam ille appellat lineam impulsionis, posset appellari mensura temporis, nam in quocunque alio casu erit tempus ex A ad N, ad tempus ex A ad D, ut A M ad A B; quare oportebit ipsam A B adnotare cum illo primo tempore, ut quotiescunque deinde habeatur A M, innotescat tempus.

Ut vero adnotari possit mensura temporis, ac mensura projectionis

ctionis tormenti bellici H A emittentis globum certi ponderis certa quantitate dati pulveris pyrii; ante explosionem applicetur ad os tormenti ipsius norma oblongior G D I adnexa semicirculo G F D in gradus diviso, ex cujus centro C pendeat filum C P cum pondere P, noteturque angulus D C P, quem exhibebit arcus D F. Nam ipsi æqualis erit angulus B A E, quem facit directio projectionis A B cum recta verticali A E, qui idem est ac in fig. 4. In eadem autem similì artificio, & simili instrumento haberi poterit angulus E A D. Habebuntur igitur in triangulo A B D angulus quidem A B D æqualis alterno E A B, & angulus A D B complementum ad duos rectos anguli E A D interni, & ad easdem partes; mensurataque distantia A D, innotescent per Trigonometriam trianguli ipsius latera D B, B A, & proinde mensura A E, quæ est tertia proportionalis post ipsas D B, B A. F.5. F.4.

Si autem quæratur formula, quæ ipsam A E exprimat, ponatur recta A D $= a$, sinus primi anguli inventi E A B $= m$, sinus E A D $= n$, sinus eorum differentiæ B A D $= p$, eritque AE $= \frac{ann}{mp}$. Nam sinus anguli A B D est idem ac sinus alterni B A E, nempe m, & sinus anguli A D B est idem ac sinus E A D ejus complementi ad duos rectos. Est autem ut sinus anguli B $= m$ ad sinum anguli D $= n$, ita A D $= a$ ad A B $= \frac{an}{m}$; & ut sinus anguli B $= m$ ad sinum anguli B A D $= p$, ita A D $= a$ ad B D $= \frac{ap}{m}$: ac demum B D $= \frac{ap}{m}$. A B $= \frac{an}{m}$ :: A B $= \frac{an}{m}$. A E $\frac{ann}{mp}$. Hic autem valor per logarithmos expeditissimè invenitur.

Si tormentum ita dirigendum sit, ut linea directionis efficiat cum verticali datum angulum; res eodem instrumento peragetur facillimè, ut patet.

PROPOSITIO III.

Data distantia loci projectionis A a scopo N, sive recta A N, & dato angulo E A N, quem facit ipsa recta cum verticali A E, ac data mensura projectionis A E, invenire projectionis directionem A M. F.6.

Erigatur verticalis indefinita N M m, & supra rectam A E describatur ad partes N segmentum circuli A B E capiens angulum æqualem angulo A N M (per 33. l. 3.), quod circuli segmentum si alicubi secet rectam N M in M & m determinabit directiones A M, A m quæsitas. Ductis enim E M, E m, erit per con-

ſtructionem tam angulus A M E, quam angulus A *m* E æqualis angulo A N M. Quare per corol. 2. prop. 2. utralibet ex directionibus A M, A *m* corpus abibit in N.

Cor. 1. Si autem detur directio A M, & quæratur A N amplitudo projectionis in recta A D, cujus poſitio datur in plano verticali E A M; invenietur, ſi producta D A indefinitè in C, fiat ſegmentum circuli A M E continens angulum æqualem angulo C A E, & directionem A M ſecans in M, ducaturque M N parallela E A. Erit enim angulus A N M æqualis externo, & oppoſito C A E, nempe angulo A M E per conſtructionem.

Cor. 2. Erit tam in caſu propoſitionis, quam in caſu corollarii primi recta A N tangens ipſius circuli, (per prop. 32. lib. 3.) cum angulus A M E in alterno ſegmento ſit in utroque caſu æqualis angulo E A C.

Cor. 3. Erit igitur dimidium arcus A M menſura anguli M A N, quem facit chorda cum tangente: cumque ob A E, M *m* parallelas arcus A M æquetur arcui E *m*. cujus dimidium menſurat angulum E A *m* ad circumferentiam, erunt æquales ipſi anguli M A N, *m* A E. Ac proinde directiones A M, A *m*, quarum altera cum recta A D contineat angulum æqualem ei, quem altera facit cum verticali A E, eandem habebunt projectionis amplitudinem in eadem recta A D.

Cor. 4. Si recta I B ſecans A E bifariam & ad angulos rectos in I occurrat circulo in B, recta autem B D normalis ad I B ipſum circulum tangat in B; erit A D maxima diſtantia, ad quam corpus cum ea velocitate projectum pervenire poteſt in recta A D, directio autem erit A B; ſi enim quacunque alia directione A M vel A *m* projiciatur; recta *m* M N tranſibit per N intra A & D. Quare ad omnia puncta N inter A & D poterit corpus pertingere duplici directione A M, A *m*, ad punctum D unica A B: puncta autem ulteriora erunt extra jactum.

Cor. 5. Si recta A N D fuerit horizontalis; erit A E normalis ad tangentem A D; quare circuli diameter erit ipſa A E, centrum vero in I, & A D parallela, & æqualis radio I B ſive I A. Maxima igitur amplitudo projectionis in plano horizontali per punctum projectionis tranſeunte æqualis erit dimidiæ A E, ſcilicet dimidiæ menſuræ projectionis.

Cor. 6. Cum arcus B A, B E æquales ſint; erit eadem demonſtratione Corollarii 3. angulus B A D æqualis angulo B A E, adeoque & alterno A B D, ac proinde & angulus E A D bifariam ſectus a directione A B, & triangulum A D B iſoſceles. Erit igitur maxima amplitudo projectionis in recta per punctum projectionis tranſeunte, & jacente in eodem verticali plano cum directione, ubi directio ipſa ſecat bifariam angulum, quem eadem recta facit cum verticali, & ipſa maxima amplitudo A D erit æqualis rectæ D B normali ad I B ſecantem bifariam & ad angulos rectos menſuram projectionis A E.

SCHO-

SCHOLIUM.

Ex hac propositione potest erui constructio instrumenti expeditissimi pro utroque tormentorum genere, quorum altero pyroboli emittuntur altero ferrei globi, ac primum quidem vulgo dicimus *Mortari da Bombe*, alterum *Cannoni*. Fiat ex crassiore materia circulus A M E divisus in 180. partes æquales cum regula A O I ipsum contingente in A immobili, vel simul compacta ex eadem materia, & longa circiter ita ut æquet circuli diametrum, ac circa punctum A girare possit altera regula A C H longior circuli diametro, ex cujus puncto C pendeat filum C P cum pondere P. Numeri autem divisionum collocentur intra ipsum circulum ab A per M versus E. *F.* 7.

Usus instrumenti est æque facilis, ac ejus constructio. Ita collocetur, ut latus A O dirigatur ad scopum, quod facile præstabitur ope duplicis pinnulæ collocatæ circa A & C, regula autem mobilis A C jaceat vertcialis, quod indicabit pendulum C P radens latus A C. Si autem E sit concursus ejusdem lateris cum circulo, aptetur in circino proportionis ipsa A E ad tot partes, quot pedes, vel passus continebat mensura projectionis determinata in Scholio post prop. 2., & ex eodem circino capiatur A N respondens pedibus, vel passibus contentis in distantia A N fig. *6.*; tum regula A C H ita circumducatur, & abeat in A *c b*; ut penduli *c p* filum transeat per N, quod filum si circulo occurrat in M, & *m*; partes arcus A M, qui æquatur arcui E *m*, ob A E, M *m* parallelas, indicabunt gradus assumendos in arcu D F fig. 5. pro tormentis emittentibus pyrobolos, partes autem A *m*, quæ æquantur partibus E M, idem indicabunt pro tormentis emittentibus globos ferreos.

Demonstratio patet ex constructione: Cum enim sit A E ad A N in eadem ratione tam in fig. *6.*, quam in 7., atque angulus E A N utrobique æqualis, similes erunt eæ figuræ; quare arcus E *m* E *m* M similes in utraque figura; dimidium autem arcus E *m*, vel E *m* M, quod est mensura anguli E A *m* vel E A M figuræ *6.*, sive anguli E A B, vel D C P figuræ 5., erit tot graduum, quot partes sunt in arcu E *m*, vel E *m* M figuræ 7., cum singulæ ex iis partibus contineant binos gradus.

Distantia vero A M vel A *m* exhibebit tempus juxta Schol. post prop. 2.

Instrumentum fere omnino simile ex hac eadem Theoria excogitavit Blondellus, quo tamen utitur inverso, atque ita, ut non sit satis nosse distantiam directam A N scopi, sed requiratur distantia horizontalis, quæ sine nova trianguli resolutione non invenitur.

Eodem instrumento poterit pariter determinari mensura projectionis, quæ per calculum trigonometricum exhibita est in Scholio post prop. 2. Si enim dirigatur latus A O ad scopum, sumaturque A M vel A *m* tot partium, quot graduum erat angulus E A N in fig. 4., & filum *c p* transiens per M vel *m*, occurrat rectæ A O in N; tum

tum erigatur regula A E C in situm verticalem; oportebit in circino applicare A N ad eum numerum partium æqualium, qui exprimit quot pedes, vel passus contineat distantia A N figuræ 4., & videre, quot partes æquales contineat chorda A E in eodem circino tot enim passuum vel pedum erit mensura projectionis.

Licebit pariter definire maximam projectionem in recta A D figuræ 6. juxta corol. 4. hujus prop., adducto nimirum filo C P ad T R ita, ut circulum contingat in B, & rectæ A O occurrat in D; nam A D ope circini proportionis exhibebit maximam amplitudinem quæsitam.

Si quis circino proportionis uti nolit, is dividat in partes æquales quotlibet latus regulæ A C, ac tangentem A O; etsi ex amplitudine projectionis A N fig. 4. quæratur ipsius projectionis mensura A E, faciat ut partes A N fig. 7. ad partes A E, ita passus vel pedes A N fig. 4. ad passus vel pedes A E; & viceversa, si ex data mensura projectionis quæratur punctum N pro inveniendis punctis M, *m*.

Si amplitudinem datæ projectionis in dato plano transeunte per ipsius projectionis punctum libeat definire ope formulæ traditæ in Scholio post prop. 2.; ponatur mensura projectionis $= b$, eritque ex
F.6. formula tradita $b = \frac{ann}{mp}$ quare $a = \frac{mpb}{nn}$. Sunt autem *m*, *n*, *p*, sinus angulorum A M N, M A N, M N A, qui dantur ex directione projectionis, & plano; *a* verò est amplitudo quæsita.

L E M M A V.

In recta indefinita datis punctis A, B, oporteat invenire pun-
F.8. ctum R ita, ut rectangulum sub A R & R B æquetur rectangulo sub
& 9. datis rectis. Secta A B bifariam in C, centro C intervallo C A describatur circulus A M B. Inter illas datas rectas inveniatur media proportionalis, cui æqualis fiat recta B D normalis ad A B.

F.8. Jam si punctum R inveniri debet extra puncta A B, centro C intervallo C D inveniantur puncta R, *r*, quæ erunt quæsita puncta. Nam ducta per C recta D *m* M, quæ circulum secet in *m* M, & conjunctis punctis R M, *r m*, in triangulis C B D, C *m r*, C M R, præter angulum ad C vel communem, vel æqualem ad verticem, latera C B, C M, C *m* æqualia sunt per circulum, & latera C D, C *r*, C R æqualia per constructionem; quare & tota triangula, & latera R M, *r m*, B D æqualia erunt, & anguli ad M, & *m* æquales angulo recto C B D, ac proinde erunt M R, *m r* tangentes, & (per pr. 36. lib. 3.) rectangulum sub A R, & R B æquale quadrato M R, sive B D, seu per constructionem rectangulo sub datis rectis: & eadem est demonstratio pro puncto *r*.

F.9. Si vero punctum R quæratur intra puncta A B, ducatur recta D I parallela diametro B A, quæ si circulo occurrat in *m*, & M; inde demittantur M R, *m r* normales ad A B; eruntque puncta R, *r* quæ-

quæsita. Demonstratio patet. Nam in rectangulo B M erit M R = B D, &, ob circulum, erit rectangulum sub A R, & R B æquale quadrato M R, sive B D, seu per constructionem rectangulo sub datis rectis: & eadem est demonstratio pro puncto *r*.

Cor. Patet primum casum admittere semper duas solutiones; cum B D sit tangens, adeoque punctum D extra circulum, punctum autem C intra ipsum. In secundo casu si rectangulum datum deficit a quadrato dimidiæ datæ rectæ A B, erunt duæ solutiones; si æquatur ipsi, erit unica utroque puncto R, *r* abeunte in centrum C; si ipsum excedit, casus evadit impossibilis. Si enim erigatur radius C H parallelus tangenti B D occurrens rectæ D M in I; in rectangulo B I erit C I = B D; quare si B D est minor C H, seu dimidia recta A B, recta D I bis occurret circulo; si eidem æqualis sit, continget recta D I circulum in H, punctis M I *m* H coeuntibus; si verò B D ipsam C H excedat, recta D I extra circulum cadet.

S C H O L I U M.

Problemata omnia, quæ in Analysi sunt secundi gradus, huc reducuntur, quod Veteres non ignorasse, ostendit Hallejus in Scholio generali post primum Apollonii librum de sectione rationis, quem ipse, cum jam periisse censeretur, ex Arabico Codice latine reddidit; ubi affirmat *Reduxisse Veteres problemata plana omnia ad has duas formulas; nempe ut cognita dati rectanguli summa, vel differentia laterum, invenirentur latera singillatim*. Has autem formulas construxisse ope prop. 28., & 29. lib. 6. Euclid., quarum particularis casus est. *Ad datam rectam applicare datum rectangulum deficiens, vel excedens quadrato*, quod eodem recidit. Male tamen ibidem reprehendit *Taquetum*, *Chalesium*, & *eorum Asseclas*, qui eas propositiones ex elementis rejecerint. Facilius enim construuntur per hoc Lemma, quod eruitur ex notissimis circuli proprietatibus.

Hac eadem constructione utimur in Analysi, ubi occurrat æquatio secundi gradus, & hanc ipsam præfixit Hugo de Omerique Analysi suæ Geometricæ, ubi idem sic proponit: *Invenire duas rectas reciprocas datis, quarum detur summa, vel differentia*. Id autem opus longe præstantissimum nullis unquam laudibus satis efferri potest. Atque utinam lucem aliquando aspiceret altera operis pars, in qua problemata solida eadem certa methodo ac admirabili illa elegantia resolvuntur simul, & construuntur ipso auctore teste, quo in prima parte problemata plana. Dicitur autem apud ejus Viduam ineditum tam egregium opus Gadibus asservari.

PRO-

PROPOSITIO IV.

F.10. 11. 12. 13. 14. *Data projectionis mensura A E, directione A M, & plano quocunque, invenire punctum plani in quod corpus cadet.*

QUoniam corpus a sola gravitate deflectitur perpendiculariter ad horizontem per coroll. 2. lemm. 2.; semper erit in plano verticali transeunte per directionem A M, & per verticalem A E. Cadet igitur alicubi in N in recta P N, quæ sit communis intersectio ejus plani verticalis cum dato plano, quæ intersectio dato utroque plano datur. Plures autem sunt casus.

F.10. 1. Sit P N parallela verticali A E, & secet directionem A M in M. Fiat EA. AM :: AM. MN; & cadet in N per prop. 2.

F.11. 2. Sit P N parallela directioni A M, & secet verticalem A E infra A in P, (si autem supra A secet, patet casum fore impossibilem). Fiat P N media proportionalis inter E A & A P, eritque punctum N quæsitum; nam completo parallelogrammo A P N M, erit A M = P N, & A P = M N; quare E A. A M :: A M. M N; ut oportebat.

F.12. 3. Transeat recta P N per A, & cum directione A M constituat angulum M A N infra angulum E A M (si enim recta A N caderet intra angulum E A M; patet in ipsa nullum posse occurrere quæsitum punctum). Ipsi M A N fiat æqualis ex eadem parte rectæ A E angulus A E M, & demittatur M N parallela E A; eritque punctum N quæsitum punctum. Nam ob angulos quoque alternos NMA, M A E æquales, similia erunt triangula E M A, A N M; quare A E. A M :: A M. M N; Casus vero coincidit cum casu corollarii 1. prop. 3.

F.13. 14. 4. Occurrat P N directioni projectionis in I, & verticali E A in P vel infra punctum A ut in fig. 13., vel supra ut in 14., & quæratur N. Concipiatur solita N M, & fiat angulus A E B æqualis angulo A I P ita, ut recta E B subtendat vel angulum I A P ut, in f. 14., vel ipsi æqualem ad verticem ut in fig. 13., ac proinde triangula E A B, I A P similia sint. Cum autem ob M N, AP parallelas sint etiam similia triangula I A P, I M N; erunt etiam similia E A B, I M N. Quare A E. A B :: I M. M N; Sed per prop. 2. est A E. A M :: A M. M N. Ergo ex æquo A M. A B :: I M. A M, & dividendo B M. A B :: I A. A M. Quare rectangulum sub B M & A M æquale erit rectangulo sub datis rectis A B & I A. Dantur autem puncta A & B; igitur dabuntur per lemma 5. etiam duo puncta M & *m*, vel unicum, vel nullum; & ex eodem lemmate patet constructio, & per regressum demonstratio.

Cor. 1. Si ducatur A C parallela ipsi I N, cui occurrat recta

B C parallela verticali E A ; erit angulus B A C æqualis angulo A I P interno & oppoſito in fig. 13., alterno in fig. 14. ; quare per caſum 3. corpus caderet in C. Inde autem facile eruitur debere incidere in rectam P N in fig. 13. poſt verticalem B C, in fig. 14. ante eandem. Quare punctum M in fig. 13. erit quærendum extra puncta A, B ; in fig. 14. intra eadem.

Cor. 2. Dabuntur igitur per coroll. lemm. 5. in figura 13. duo puncta M, *m*, quorum primum dabit punctum N pro caſu projectionis per A M, alterum dabit punctum *n* pro caſu projectionis per A *m*. At in fig. 14. ſi rectangulum ſub A B & I A fuerit majus quadrato dimidiæ A B, nullum invenietur punctum M ; ſi æquetur ipſi, erit unicum in media A B ; ſi ab ipſo deficiat, duo puncta invenientur.

Cor. 3. Quoniam quadratum dimidiæ A B eſt $\frac{1}{4}$ A B *q*. erit rectangulum ſub I A & A B ad quadratum dimidiæ A B, ut A I ad quartam partem A B, dividendo nimirum utrinque per A B. Si igitur I A fuerit major quam quarta pars ipſius A B, corpus ad rectam P I non pertinget ; ſi A I fuerit quarta pars ipſius A B, corpus rectam P I tantum continget in unico puncto N, quod invenietur facta I N æquali I P ; erit enim ibi A M dimidia A B, adeoque dupla A I ; quare A I æqualis I M, & ob triangula ſimilia A I P, M I N, erit I P æqualis I N. Demum ſi A I fuerit minor quarta parte A B ; duo erunt puncta M, *m*, adeoque duo puncta N, *n*, ita tamen, ut corpus primo impingat in N ; at ſi ibi ſit excavatum foramen permittens liberum tranſitum, decidat in *n*.

Cor. 4. Si recta P N fuerit horizontalis, & A I quarta pars rectæ A B ; erit A P maxima altitudo, ad quam aſcendet corpus ſupra horizontem. Erit autem angulus quoque A B E rectus ob ſimilia triangula A B E, A P I ; & ſi fiat angulus rectus A I O, erit A O. A E : : A I. A B, ſive A O quarta pars ipſius A E ; puncta vero, I B erunt ad ſemicirculos quorum diametri A O, A E. F. 15

Cor. 5. Quoniam recta A B abeunte in rectam verticalem A E, puncta I P abeunt in O ; ſi projectio verticalis eſſet corpus ad O perveniret ; unde recidens in A, & per eoſdem gradus velocitatem recuperans, per quos amiſerat, habebit in A velocitatem, cum qua projectum fuit. Demonſtratur igitur iterum, quod demonſtratum eſt in coroll. 2. prop. 2., nimirum menſuram projectionis A E eſſe quadruplam ejus altitudinis, ex qua grave delapſum acquireret velocitatem velocitati projectionis æqualem.

Cor. 6. Si ducatur B Q perpendicularis ad A E, & B C parallela E A, & compleatur rectangulum A Q B C ; erit B Q æqualis ipſi C A, quæ eſt amplitudo ejus projectionis in recta A C parallela P N, ſive horizontali. At A Q erit quadrupla A P ob ſimilia triangula A P I, A Q B, & A B quadruplam A I. Igitur ſi diametro A E ſit ſemicirculus, & ex occurſu directionis cum ipſo, nempe ex puncto B, ducatur recta B Q normalis ad diametrum ; erit maxima altitudo corporis ſupra horizontem quarta pars ipſius A Q, & amplitudo

tudo projectionis in horizonte erit ipsi B Q æqualis.

Cor. 7. Variato autem angulo E A B, erunt amplitudines horizontales ut ipsæ B Q. Cumque eadem sit earum ratio, manentibus angulis E A B, quæcunque diameter pro A E substituatur; in quocunque semicirculo faciat chorda cum diametro angulum ipsi E A B æqualem, & ab altero chordæ extremo demittatur normalis ad diametrum, exprimet ipsa rationem amplitudinum horizontalium.

SCHOLIUM I.

F.16. Ex hoc postremo corollario facile demonstratur usus instrumenti a Torricello excogitati, quod etiam Blondellus proponit, & laudat. Regulæ G L longiori adnectatur semicirculus G H D, in quo sit radius C H normalis ad diametrum D G, qui radius dividatur in quotcunque particulas æquales, & agantur quotcunque rectæ F O diametro parallelæ, ipsi radio C H occurrentes in punctis I: ex G autem filum pendeat cum pondere. Jam immissa parte regulæ A L intra os tormenti ante explosionem, & notato puncto F, notetur quot particulas contineat pars C I radii C H respondens puncto F, & notetur quot pedum vel passuum fuerit amplitudo horizontalis. Eritque in omni alio casu ut hæc amplitudo ad amplitudinem illius casus, ita hæc C I ad aliam C I pro eodem casu. Quare si detur in alio casu distantia scopi in horizonte, innotescet ipsa C I per regulam trium, ac punctum F, & directio. Si autem detur directio in alio casu, dabitur punctum F, & recta C I, ac per regulam trium amplitudo projectionis in horizonte. Pendet autem tota demonstratio ex eo, quod ipsa I C æquetur perpendiculo F R demisso ex F in diametrum, & angulus D G F æquetur angulo E A G, quem facit directio A G cum verticali A E.

Licet etiam loco divisionis radii C H dividere circunferentiam D H G in gradus, & gradus D F eruere ex tabula sinuum. Cum enim F R sit sinus arcus D F; erunt amplitudines horizontales ut arcuum D F sinus; quare semel adnotato arcu D F & amplitudine horizontali, per regulam trium eruetur vel nova amplitudo pro novo arcu DF, vel novus arcus D F pro nova amplitudine. Torricellius in binos gradus dividit semicircunferentiam G F D, adscriptis numeris a G per F versus D usque ad 90., ut partes F D exhibeant angulum directionis cum verticali, & residuæ F G elevationem supra horizontem; ac tabellam profert, in qua, unitati respondet sinus duorum graduum, binario quatuor graduum, & ita porro, quam tabellam Galilæus tradiderat ad eruendas elevationes directionis supra horizontem, & quam proponit Blondellus, ac Bion in instrumentorum constructione & usu.

Sed præterquamquod extra planum horizontale alius adhuc calculus requiritur ad directionem determinandam, videtur instrumentum propositum in scholio post prop. 3. longe utilius fore vel ex eo

capi-

capite, quod in quocunque plano jaceat scopus, determinatur directio quæsita absque ulla supputatione per facilem constructionem.

SCHOLIUM II.

Hactenus præcipua problemata circa motum gravium in spatio non resistente projectorum soluta sunt absque ullo usu conicarum sectionum, ut oportebat, cum omnia problemata proposita sint plana. Et in his quidem omnibus quærebatur determinatum quoddam punctum. Sunt autem alia plura omnino non contemnenda, in quibus loca quædam potius quæruntur, quam puncta determinata, quæ sine conicorum doctrina solvi non possunt; cum in ipsas incidant conicas sectiones. Hujusmodi sunt 1. Determinare naturam curvæ, quam grave describit. 2. Determinare spatium omne solidum, ad quod pervenire possit corpus ex eodem puncto cum eadem velocitate egrediens, variatis utcunque directionibus; unde etiam profluet determinatio punctorum omnium, quæ in dato plano sunt intra jactum. Et primum quidem a Galilæo determinatum passim traditur, alterum verò nusquam legimus. Conicorum autem doctrinam desumemus ex Quadratura circuli Gregorii a S. Vincentio, & ex Analysi Hospitalii.

PROPOSITIO V.

Determinare curvam, quam grave projectum describit.

Grave projectum per A B describat curvam A N C, quæritur ejus natura. Dico esse parabolam, cujus tangens sit directio A B, diameter recta verticalis E A R, diametri vertex A, parameter A E quàdrupla ejus altitudinis, ex quo grave libere decidens acquireret eam velocitatem, cum qua projicitur. Demonstratur. Erecta ex quocunque puncto N curvæ recta N M verticali, est per prop. 2. A E. A M : : A M. M N. Igitur punctum N est ad dictam parabolam. Constat ex Greg. a S. Vinc. lib. 5. pr. 291., & constat ex natura ordinatarum ad secundas diametros, quibus ordinatis ipsæ A M parallelæ essent & æquales, M N verò parallelæ & æquales abscissis. F. 15

SCHOLIUM.

Parabolæ vertex N & occursus cum datis planis determinata sunt in prop. 4. cum corollariis. Facile autem demonstratur, velocitatem in singulis punctis esse in ratione inversa sinuum eorum angulorum, quos in iisdem punctis efficiunt tangentes parabolæ cum rectis verticalibus, sive ejusdem parabolæ diametris; & latus rectum esse quadruplum rectæ O P.

In

In Parabolis omnibus, quæ variatis directionibus describerentur, eadem erit parameter A E diametri ad punctum A pertinentis; cumque omnis diametri vertex distet a foco per quartam suæ parametri partem, (per prop. 123. lib. 5. Gregorii a S. Vinc.) omnium parabolarum foci æque distabunt a puncto A, adeoque omnium parabolarum foci erunt ad superficiem sphæræ, cujus centrum A, radius A O quarta pars ipsius A E.

Cum omnis diametri vertex æque distet a foco, ac a directrice; (per def. 1. lib. 1. Hospitalii) erit omnium parabolarum directrix recta eadem ducta per O perpendicularis ad O A, sive horizontalis. Omnium vero parabolarum vertices N erunt ad superficiem sphæroidis ellipticæ genitæ ex revolutione ellipseos A N O circa axem conjugatum A O cujus axis transversus sit ipsius A O duplus. Patet ex corollario 3.& 4.prop.4.Nam si corpus contingat rectam P N horizontalem in N; erit N vertex parabolæ; erit autem per coroll. 3. prop.4. P N dupla P I, ac per cor. 4. angulus A I O rectus, & punctum I ad circulum, cujus diameter A O. Quare P I ordinata ad circuli diametrum erit ad P N constanter ut 1. ad 2., ac propterea (per pro. 152. l. 4. Greg. a S. Vinc.) punctum N ad ellipsim, cujus alter axis A O, alter ipsius A O duplus, quod etiam Blondellus ostendit. Cum vero parameter cujuscunque diametri sit tertia proportionalis post ipsam & diametrum conjugatam, erit parameter axis A O ipsius quadrupla, nempe illa mensura projectionis A E.

PROPOSITIO VI.

Determinare solidum continens puncta omnia, ad quæ possit pertingere corpus ex dato puncto cum data velocitate egrediens.

F.17 Projiciatur corpus ex A quacunque directione, sitque mensura projectionis A E; quæritur solidum continens omnia puncta, ad quæ possit pertingere, variatis utcunque directionibus. Parabola *m* O M cujus focus A vertex O in ea altitudine, ex qua corpus libere decidens acquireret velocitatem, cum qua projicitur, revoluta circa axem O A G describat conoidem parabolicam O M H *m*; dico ipsam continere puncta omnia quæsita. Demonstratur. In quacunque recta indefinita A D maxima amplitudo projectionis est, per cor. 4. prop. 3. in eo puncto D, ex quo educta D B normalis ad rectam I B secantem bifariam, & ad angulos rectos in I mensuram projectionis A E æquetur A D; ita ut ad omnia puncta intra A D possit corpus pertingere, puncta autem ulteriora sint extra jactum. Erit autem punctum D (per def. 1. lib. 1. Hospit.) ad parabolam A D M, cujus focus A directrix I B axis recta ad I B normalis, adeoque recta O A G per def. 3. 2. 4. ejusdem. Ejus autem parabolæ vertex est in pun-

puncto O, quod bifariam secat rectam A I normalem ex foco in directricem, & latus rectum A E quadrupla ipsius A O (per cor. 3. post definitionem 8. & per def. 5. ejusdem). Giret jam parabola O D M circa axem O G, & patet conoidem genitam debere in sua superficie continere omnia puncta D, in quocunque plano jaceant, ac intra se puncta omnia quæ sint intra jactum.

Cor. Si igitur in dato plano quærantur omnia puncta, quæ sunt intra jactum; oportebit determinare ejusdem plani intersectionem cum eadem conoide, qua inventa, solvetur problema.

PROPOSITIO VII.

Explicare sectiones conoidis Parabolicæ.

1. SEcetur conois parabolica per axem O G plano O G H; sectio O S H erit parabola æqualis genitrici O F M. Nam ubi in hujus revolutione ipsius planum O G M congruit cum plano sectionis O G H, congruet & perimeter O G M cum perimetro OSH.

2. Secetur plano F S *f* perpendiculari ad axem O G, & sectio erit circulus, cujus centrum T in axe, radius T F intersectio ejus plani cum plano parabolæ genitricis: Nam in hujus revolutione puncto F transeunte in S, & *f*, ordinata T F describit circulum F S *f*.

3. Secetur plano D K L parallelo alicui ex planis O G H per axem; & sectio D C L erit parabola genitrici æqualis. Si enim sectio *m* O M per axem O G, quæ per numerum primum erit parabola, occurrat sectioni D K L in recta D K, & sit eidem perpendicularis; erit ipsa D K axi O G parallela; cum planorum parallelorum O G H, D K L, cum eodem plano *m* O M intersectiones O G, D K debeant esse parallelæ. Secetur jam per quodcunque punctum Q rectæ D K conois ipsa plano F S *f* perpendiculari ad axem, ac proinde ad totum planum *m* O M, & patet ex n. 2. sectionem fore circulum, cujus diameter F T *f* erit ad axem normalis; ac intersectio Q C cum plano D K C, eidem *m* O M perpendiculari, erit perpendicularis ipsi plano *m* O M, ac proinde tam rectæ D K, quam rectæ *f* F; erit igitur, ob circulum, quadratum Q C æquale rectangulo *f* Q F. Sed in parabola *m* O M cum recta Q D sit parallela axi T O, est (per cor. 4. prop. 13. lib. 4. Hospitalii) rectangulum sub *f* Q & Q F æquale rectangulo sub Q D & A E latere recto parabolæ. Erit igitur quadratum Q C æquale rectangulo sub D Q & latere recto parabolæ genitricis; quæ est præcipua affectio parabolæ habentis idem latus rectum.

4. Secetur demum quocunque plano obliquo *n* C N; eritque sectio Ellipsis; nam intellecta similiter parabola *m* O M, & circulo *f* C F, erit C Q normalis tam ad circuli diametrum *f* F, quam ad sectionis axem *n* N. Est autem (per illud idem corol. 4. Hospitalii) rectangulum sub *n* Q, & Q N æquale rectangulo sub Q D, & parametro ejus

ejus diametri, cujus N n est ordinata, & rectangulum sub fQ & Q F seu quadratum Q C, æquale rectangulo sub eadem Q D, & parametro axis, seu latere recto parabolæ. Erit igitur ob Q D communem, rectangulum sub nQ & Q N ad quadratum Q C, utcunque variato puncto Q, in constanti ratione parametri ejus diametri, cujus ordinata est chorda n N, ad latus rectum parabolæ; quæ est primaria proprietas Ellipseos, cujus axis transversus N n, conjugati quadratum ad transversi q: ut latus rectum ad illam eandem parametrum.

Cor. 1. Si igitur planum est verticale; puncta omnia quæsita in prop. 6. sunt in parabola, cujus parameter æqualis mensuræ, projectionis; si horizontale, est circulus; si obliquum, est ellipsis, in qua axis transversus ad conjugatum in ratione directa radii ad sinum declinationis plani ejusdem a verticali. Nam facile demonstrari potest in parabola diametrorum parametros esse in ratione reciproca duplicata sinuum eorum angulorum, quos faciunt cum suis ordinatis vel ipsæ diametri, vel axis.

Coroll. 2. Dabuntur autem ipsæ sectiones non tantum specie, sed etiam magnitudine ob datum parabolæ verticem O latus rectum A E, & datam positionem plani secantis. Invenientur enim puncta N F D n f fere eadem methodo, quæ adhibita est in prop. 4.

SCHOLIUM.

Cum (per cor. 2. prop. 13. l. 4. Hospit.) in omni conica sectione manente directione chordæ, fF, quæ occurrat chordæ n N in Q, sit semper constans ratio rectanguli n Q N ad rectangulum fQ F, vel ad quadratum Q C; patet si conois orta ex revolutione sectionis conicæ secetur plano quocunque, sectionem fore aliquam ex sectionibus conicis; adnumerato Ellipsibus circulo. Et quidem Ellipsoidis sectio erit tantum Ellipsis; Paraboloidis vel Ellipsis, vel Parabola; Hiperboloidis vel Ellipsis, vel Parabola, vel Hyperbola; prout fuerit Ellipsis, Parabola, vel Hyperbola sectio conigeniti ab assymptoto una cum Hyperbola circum axem revoluta.